ここで

$$\frac{1}{e^{-2\pi i x}-1}+\frac{1}{e^{2\pi i x}-1}=-1$$

に注意し，上の二式の和を作れば

$$\{\frac{1}{2}f(0)+f(1)+\cdots\}-\int_0^\infty f(x)\,dx=i\int_0^\infty \frac{f(iy)-f(-iy)}{e^{2\pi y}-1}dy$$

を得る。これはPlanaの式とよばれるものを簡略化したものになっている。今の場合

$$\int_0^\infty f(x)\,dx=\int_0^\infty\frac{dx}{(\beta+x)^2}=\frac{1}{\beta}$$

$$f(iy)-f(-iy)=\frac{1}{(\beta+iy)^2}-\frac{1}{(\beta-iy)^2}=\frac{-4i\beta y}{(\beta^2+y^2)^2}$$

なので

$$\frac{d^2}{d\beta^2}\{\log\sqrt{\frac{\beta}{2\pi}}Q(\beta)\}=\int_0^\infty\frac{4\beta y}{(\beta^2+y^2)^2}\frac{dy}{e^{2\pi y}-1}$$

を得る。これを2度βについて積分し，$\beta\to\infty$ の値から積分定数がゼロであることを導けば，さらに部分積分して式(1)が得られる。

sine格子方程式とソリトン　―近似的解析解と数値解―

名大・工　本間重雄，　京都工繊大・工　武野正三

非線形格子方程式でソリトン解が求められた例は少ない。そこで我々は新しい格子方程式として次式を提案しこれを解くことを試みた。

$$\ddot{u}_n-\sin(u_{n+1}-u_n)+\sin(u_n-u_{n-1})$$
$$=g(-\sin u_n+\eta\sin 2u_n)\qquad(1)$$

(1)式に連続体近似を用いるとdouble sine-Gordon (d. s. G.) 方程式を得る。

$$u_{tt}-a^2u_{zz}=g(-\sin u+\eta\sin 2u),\qquad(2)$$

aは格子定数で $z_{n+1}-z_n=a$ で定義される。

(2)の one-kink解はparameter ηに依存するが求まっている。以下(1)を数値的に解くのだが，その際(2)の one-kink解を初期条件とし $t>0$での kink伝播の様子を追跡する。

(I) One-kink

ηの値によってkink解は異なる。列挙すると，

(1) $\eta<\dfrac{1}{2}$

$$u(z)=2\tan^{-1}[\pm(1-2\eta)^{1/2}\operatorname{cosech}\{(1-2\eta)^{1/2}(\bar{z}/l_0)\}] \tag{3}$$

(2) $\dfrac{1}{2}\leq\eta$

$$u_1(z)=2\tan^{-1}[\pm(\frac{2\eta-1}{2\eta+1})^{1/2}\coth\{(\frac{4\eta^2-1}{8\eta})^{1/2}(\bar{z}/l_0)\}] \tag{4}$$

(large kink)

$$u_2(z)=2\tan^{-1}[\pm(\frac{2\eta-1}{2\eta+1})^{1/2}\tanh\{(\frac{4\eta^2-1}{8\eta})^{1/2}(\bar{z}/l_0)\}] \tag{5}$$

(small kink)

ここで

$\bar{z}=(1-v^2)^{-1/2}(z-vt)$, $v<1$, $l_0=g^{-1/2}a$ であり，±はkink, autikink解を示している。

(2)の解である(3), (4), (5)を格子点数257の系に初期条件として用い，以後の時間発展を観測する。このとき $g=v=0.1$ を選んだ。従ってkinkの巾は a を単位として3.16である。

$t=0$でkinkの中心を左より64第目の格子点におく。つまり $u(64a)=\pi$ とする。

$\eta=-1.0$, $\eta=0.25$, $\eta=0.75$の場合の(3), (4), (5)の時間発展の様子を図1, 2, 3, 4に示す。ここで $w_n=u_n-u_{n+1}$. いずれの場合も $t=0$で入れたkink解(3)～(5)は形，速度

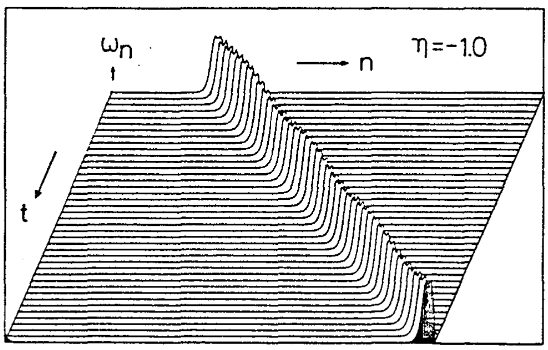

図 1

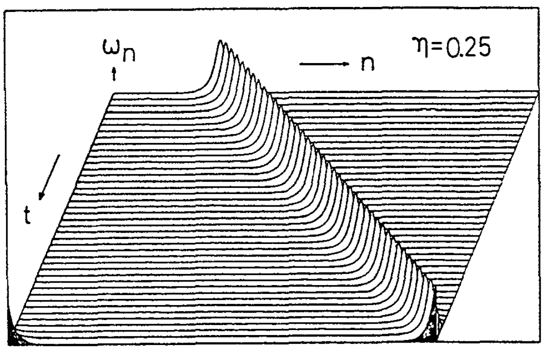

図 2

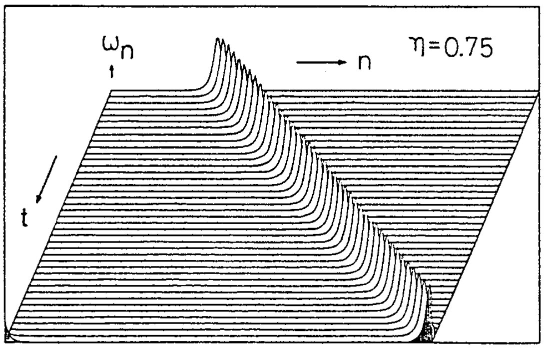

図 3

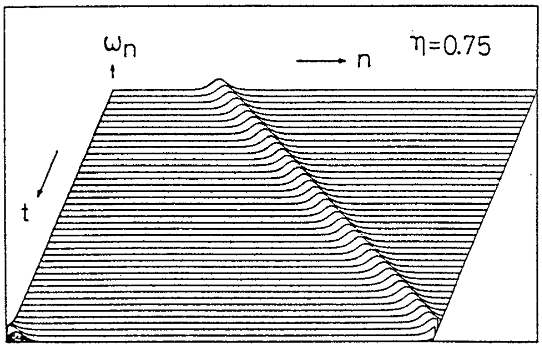

図 4

を変えずに伝播していくことがわかる。従って(3), (4), (5)は格子方程式(1)の充分に良い近似解になっており，(1)の one-kink解は（もし存在するならば）(3), (4), (5) に充分近い形で求まると思われる。

(Ⅱ) Two-kink

d. S. G. 方程式の one-kink解(3), (4), (5)が(1)の上で安定であることがわかったら，若しかして (3), (4), (5)から作る two-kink 状態も(1)の上で安定かも知れないと，想像出来る。

これを確認するために(3), (4), (5)の kink, antikink解を格子上で衝突させ，以後の安定性を追跡してみる必要がある。格子点数が 513 の系を用意し，$v = 0.1$ の kinkを左から 128番目の格子点に，$v = -0.1$ の antikinkを 385番目の格子点に $t = 0$ で in-putする。このとき $g = 0.1$ とする。この kinkと antikink を系の中心で衝突させ以後の様子を調べた。

$\eta = -0.1$，$\eta = 0.1$ の場合を図 5, 6 に示す。

$\eta = -0.1$ の場合 in-put した kink-antikink は衝突後も安定であり，従って two-kink状態が格子方程式(1)に存在する事を示している。$\eta = 0.1$ の場合，kink, antikink は衝突後 breather 的mode に変り， 系の中心附近で大振巾の振動をくり返していることがわかる。

これ等の結果から

(a)： 格子方程式(1)には安定な one-kink 状態がある。

(b)： η の値により (1)は two-kinkや breather 的状態を安定解として持つ。

以上が(1)に対する数値解析の結果である。(1)の解を解析的に求める試みも，Hirota の方法を用いて行なわれ，次式で与えられる近似解が求められている。（$\eta = 0$ の場合のみではあるが）

$$u_n(t) = 4 \tan^{-1}[\exp(kn \pm \omega t)] \tag{6}$$

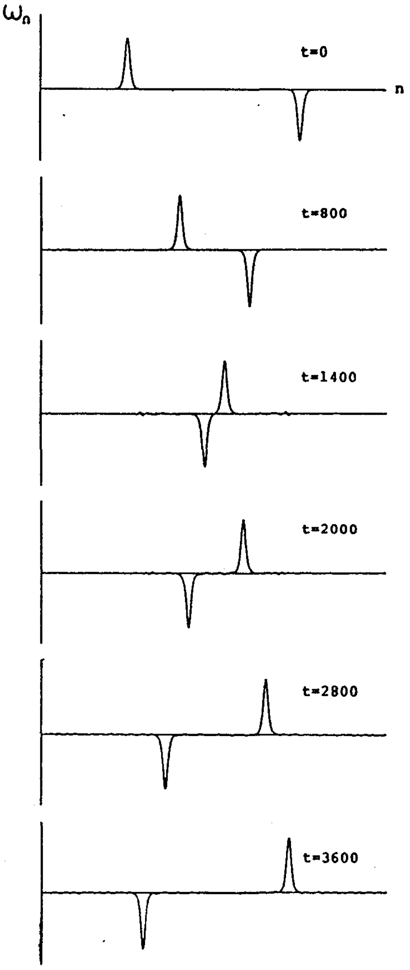

図　5

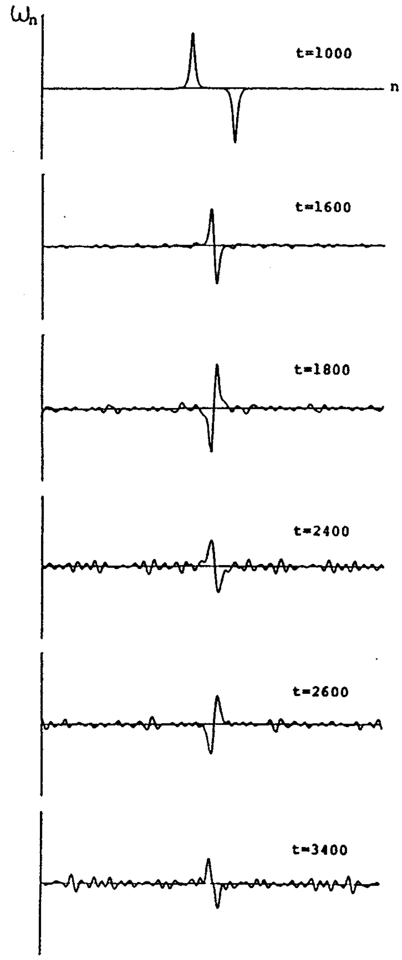

図　6

$$\omega^2 = 4\sinh^2\left(\frac{k}{2}\right) - g \tag{7}$$

特に $g=0$ の場合は on-site potential が存在しない場合の topological soliton の存在を示しており，新しい型の格子方程式を与えるものと思われる。

CHAIN 間相互作用とソリトンの運動

京大教養　川　崎　辰　夫

ソリトンは，１次元系特有の現象と見られがちだが，現実の物質は先ず３次元であろうし，うまくいっても２次元以下にはおさまらない。そのような系でソリトンが重要な役割を果たしているならば，どの程度１次元的であればよいのかを，考えてみる必要がある。